2022 IMOSL G2

Doubt Yourself

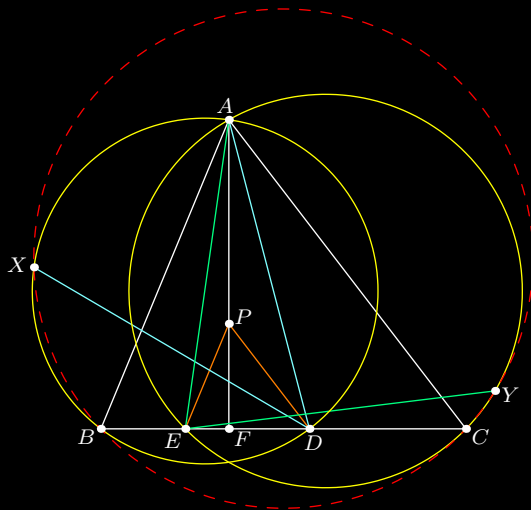
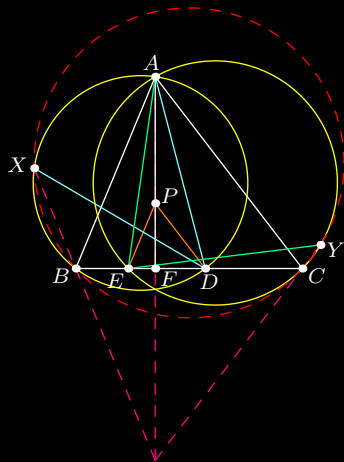
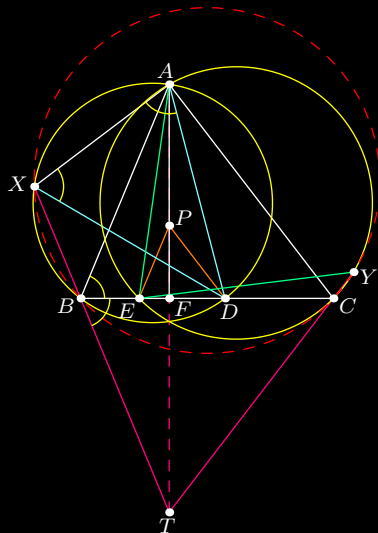
André Pinheiro

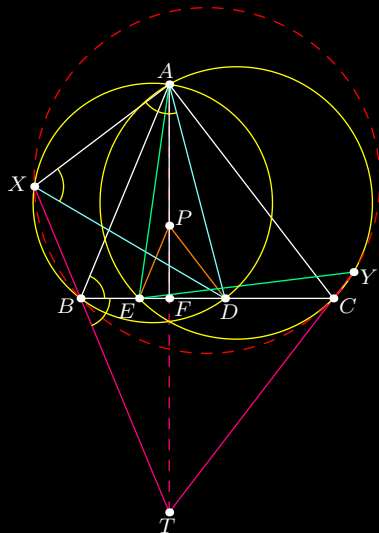
Fevereiro de 2024

Problema

Seja ABC um triângulo acutângulo, o ponto F o pé da altitude de A e P um ponto no segmento AF. As retas que passam por P paralelas a AC e AB intersetam BC em D e E, respetivamente. Os pontos $X \neq A$ e $Y \neq A$ pertencem às circunferências ABD e ACE, respetivamente, tal que $DA = DX$ e $EA = EY$.

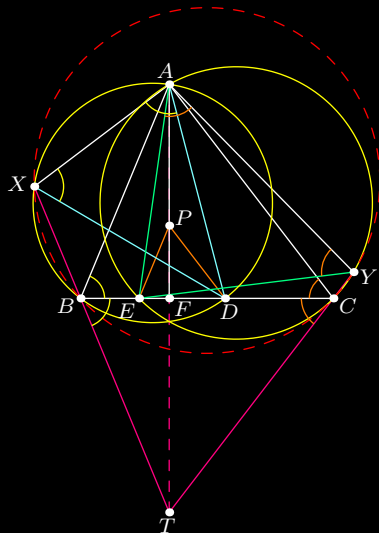
Prove que $BCXY$ é cíclico.

Diagrama

Solução

Pelo teorema do centro radical, se AF for eixo radical de (BDA) e (CAE) e retas XB, AF, YC forem concorrentes, então $XBCY$ é cíclico. Vamos tentar provar o antecedente.

Solução

Pelo teorema do centro radical, se as retas XB, AF, YC forem concorrentes, então $XBCY$ é cíclico. Então vamos tentar provar o antecedente.

Solução

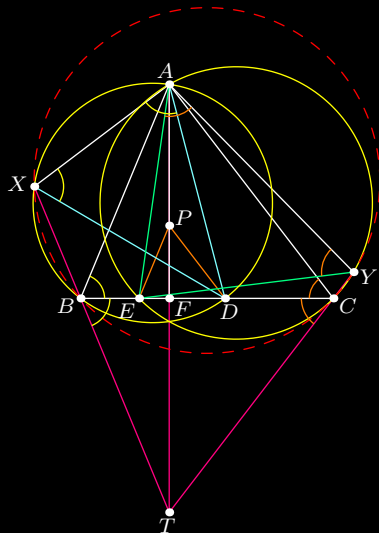
Pelo teorema do centro radical, se as retas XB, AF, YC forem concorrentes, então $XBCY$ é cíclico. Então vamos tentar provar o antecedente.

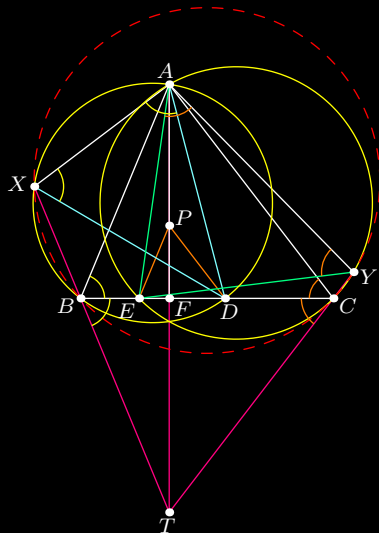
Seja $T = XB \cap YC$.
Por angle-chansing, temos que $\angle ABD = \angle AXD = \angle XAD = \angle CBT$.

Solução

Pelo teorema do centro radical, se as retas XB, AF, YC forem concorrentes, então $XBCY$ é cíclico. Então vamos tentar provar o antecedente.

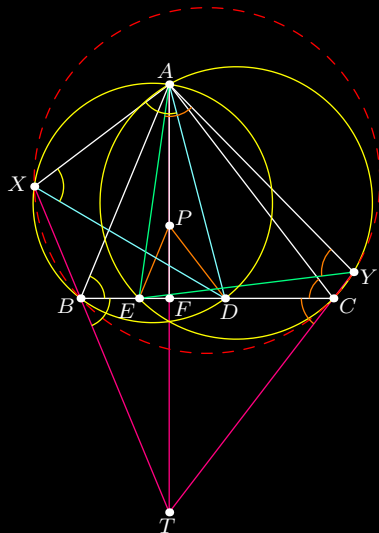
Seja $T = XB \cap YC$.
Por angle-chansing, temos que $\angle ABD = \angle AXD = \angle XAD = \angle CBT$.

De forma análoga, temos também que $\angle ECA = \angle EYA = \angle EAY = \angle BCT$.

Solução

Concluimos então que BC é bissetriz dos ângulos $\angle TBA$ e $\angle ACT$, ou seja A, F, D são colineares.

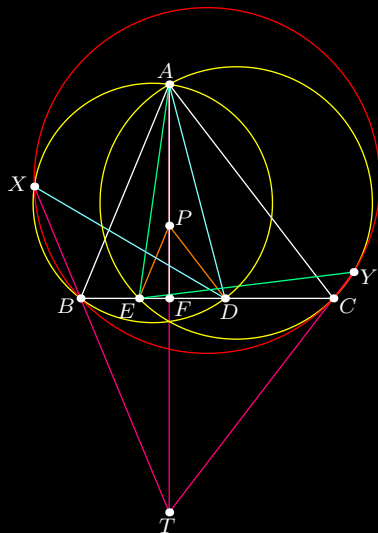
Solução

Concluimos então que BC é bissetriz dos ângulos $\angle TBA$ e $\angle ACT$, ou seja A, F, D são colineares.

Falta provar que a reta AF é o eixo radical de (BDA) e (CAE). Para isso, temos que provar que F pertence ao eixo radical, ou seja, $BF \times FD = EF \times FC$.

Solução

Concluimos então que BC é bissetriz dos ângulos $\angle TBA$ e $\angle ACT$, ou seja A, F, D são colineares.

Falta provar que a reta AF é o eixo radical de (BDA) e (CAE). Para isso, temos que provar que F pertence ao eixo radical, ou seja, $BF \times FD = EF \times FC$.

Como $\triangle BAF \sim \triangle EPF$ e $\triangle ACF \sim \triangle PDF$ e a razão de semelhança, é a mesma, temos $BF = EF \times k$ e $FD \times k = FC \Rightarrow BF \times FD = EF \times FC$

Solução

Portanto AF é o eixo radical de (BDA) e (CAE) e assim concluimos que $XBCY$ é cíclico tal como desejavamos. ■